

基于 RWG 基函数的伽略金法中奇异性积分的精确快速计算

赵延文, 聂在平, 徐建华, 武胜波

(电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

摘 要: 利用电磁场积分方程的伽略金法求解理想导体电磁散射问题时需要计算奇异性的二重面积分(即 4 维积分). 伽略金法的基函数和检验函数广泛采用 RWG(Rao-Wilton-Glisson) 矢量基函数. 传统上采用奇异值提取技术和 Duffy 坐标变换法处理该奇异性积分, 本文提出了一种更为精确和高效的计算方法, 该新方法通过参数坐标变换、相对坐标变换、积分区域分解和广义 Duffy 坐标变换相结合的技术消除了被积函数的奇异性并降低了原 4 维奇异性积分的数值积分维数. 通过计算实例证明该方法的精确性和高收敛特性.

关键词: 伽略金方法; 电磁场积分方程; 奇异性积分; 奇异值提取技术

中图分类号: TN011

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2005) 06-1019-05

Accurate and Efficient Calculation of Singular Integrals in Galerkin Method with RWG Basis Functions

ZHAO Yan-wen, NIE Zai-ping, XU Jian-hua, WU Sheng-bo

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: The Galerkin's method solution of electromagnetic field integral equations for electromagnetic scattering problems of perfectly conducting object requires calculation of singular double surface integrals. The RWG(Rao-Wilton-Glisson) vector basis functions are usually applied as basis functions and testing functions. The singularity extraction technique and Duffy coordinate transformations have been traditionally used to treat these singular integrals. A more accurate and efficient method are presented. This new method removes the singularity in the integrand and allows the reduction in dimensionality of original 4-dimensional integrations by using combination of parametric coordinates, relative coordinates, domain decomposition and general Duffy coordinate transformations. The accuracy and good convergence properties of the new method are demonstrated by some numerical examples.

Key words: Galerkin's method; electromagnetic field integral equations; singular integrals; singularity extraction technique

1 引言

求解电磁场积分方程的矩量法已广泛用于分析理想导体目标的散射问题^[1]. 而矩量法中最为精确和广泛采用的伽略金法需要计算奇异性函数的两重面积分(即 4 维积分). 该 4 维奇异性积分的精确快速计算直接影响到求解电磁场积分方程的矩量法的计算效率和求解精度. 平面三角形单元拟合及 RWG 矢量基函数以其灵活性和实用性而得到广泛的应用^[2]. 对应于场点的外层面积分一般采用如高斯积分法的直接数值积分法, 而对应于源点的内层奇异性积分常用奇异值提取技术(Singularity Extraction Technique)^[3,4]和 Duffy 坐标变换法(Duffy Coordinate Transformations)^[5,6]. 奇异值提取法的奇异性积分部分具有解析积分结果; 但非奇异性积分部分的被积函数不满足连续可导的条件, 将严重影响了高斯积分法的积分精度. Duffy 坐标变换法可以处理一阶奇异性积分并具有广泛的适用性; 但是 Duffy 坐标变换法的计算量相对较大, 且用于窄形三角形单元时积分误差较大^[7].

利用伽略金方法求解磁场积分方程需要计算二阶奇异性

积分. 对于平面三角形单元拟合和 RWG 矢量基函数, 场点和源点在同一个三角形单元上时该二阶奇异性积分具有解析结果. 由于对应于场点的外层面积分仍然存在对数奇异性, 需要选择适当的数值积分法, 如可将场三角形单元上的面积分转换成非奇异性的围线积分来消除对数奇异性^[8].

本文利用参数坐标变换、相对坐标变换将奇异性或近奇异性积分的积分区域进行重新分区, 然后利用广义 Duffy 坐标变换将奇异性积分转换成非奇异性积分; 同时, 在此过程中 4 维积分的某些维积分可以解析求出、降低了数值积分的积分维数, 提高了数值积分效率和计算精度并具有更好的收敛性能; 同时, 该方法也克服了上述传统数值积分法的缺点.

2 电场、磁场积分方程的伽略金法离散求解

假设 S 为位于均匀介质中的理想导体表面, 则入射场 $E^{\text{inc}}(r)$ 、 $H^{\text{inc}}(r)$ 将在理想导体表面 S 上产生感应电流 $J(r)$, 而 $J(r)$ 又要产生散射场 $E^{\text{scat}}(r)$ 、 $H^{\text{scat}}(r)$. 利用理想导体表面上切向场所满足的边界条件, 可以得到电场和磁场积分方程为^[1]

收稿日期: 2004-05-27; 修回日期: 2004-12-28

基金项目: 国家自然科学基金(No. 60371009); 国家部级基金资助项目(No. 51403010604DZ0233)

$$E_{\tan}^{\text{inc}}(r) = \frac{j}{\omega \epsilon} \left[(\nabla \nabla \cdot + k^2) \int_{\tan} J(r') G(r, r') dS \right]_{\tan}, r \in S \quad (1a)$$

$$H_{\tan}^{\text{inc}}(r) = \left[J(r) - n \times \nabla \times \int_{\tan} J(r') G(r, r') dS \right]_{\tan}, r \in S \quad (1b)$$

其中下标“tan”表示切向分量;格林函数 $G(r, r') = e^{-ikR}/(4\pi R)$ 且 $R = |r - r'|$ 表示场点和源点之间的距离; ϵ 和 k 分别为散射体周围介质的介电常数和波数.

为了利用电场或/和磁场积分方程数值求解表面的未知电流 $J(r)$, 首先将理想导电目标的表面用平面三角形单元拟合, 然后电流 $J(r)$ 可用基函数 $f_n(r)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) 展开为

$$J(r) = \sum_{n=1}^N I_n f_n(r) \quad (2)$$

其中 I_n 为与基函数 $f_n(r)$ 相关的待求系数, 而基函数 $f_n(r)$ 选为最为常用的 RWG 基函数^[2],

$$f_n(r) = \begin{cases} l_n \rho_n^+ / (2A_n^+) = l_n (r - r_+) / (2A_n^+), & r \in T_n^+ \\ l_n \rho_n^- / (2A_n^-) = l_n (r - r_-) / (2A_n^-), & r \in T_n^- \end{cases} \quad (3)$$

其中 l_n 为三角形单元 T_n^+ 和 T_n^- 公用边的长度; A_n^+ 和 A_n^- 分别为三角形单元 T_n^+ 和 T_n^- 的面积. 将展开式(2)代入式(1)并采用伽略金法可得矩阵方程,

$$Z^E \cdot I = V^E, \quad Z^H \cdot I = V^H \quad (4)$$

其中

$$I(m) = I_m \quad (5)$$

$$V^E(m) = \int_m f_m(r) \cdot E^{\text{inc}}(r) dS,$$

$$V^H(m) = \int_m f_m(r) \cdot H^{\text{inc}}(r) dS \quad (6)$$

$$Z^E(m, n) = \frac{j}{\omega \epsilon} \int_m \int_n [k^2 f_m(r) \cdot f_n(r') - \nabla \cdot f_m(r) \nabla' \cdot f_n(r')] G(r, r') dS' dS \quad (7)$$

$$Z^H(m, n) = \frac{1}{2} \int_m \int_n f_m(r) \cdot f_n(r') dS - \int_m \int_n f_m(r) \cdot n \times f_n(r') \nabla G(r, r') dS' dS \quad (8)$$

其中 n 为散射体表面的单位外法向矢量, 式(8)中第二个积分已提出了柯西主值.

3 奇异性积分的精确快速计算

据阻抗矩阵元素的计算式(7)和(8), 电场和磁场积分方程中矩量法中的奇异性积分总可以写成

$$I_s = \int_{T_m^q} \int_{T_n^p} \frac{E(r, r')}{R^v} e^{-jkR}, \quad v = 1, 2 \quad (9)$$

其中 $v = 1, 2$ 分别对应电场和磁场积分方程矩量法中的奇异性积分; $F(r, r')$ 表示关于场点坐标 r 或/和源点坐标 r' 的任意标量或矢量非奇异性函数; T_m^q 和 T_n^p 分别代表场三角形和源三角形单元.

为了计算奇异性积分式(9), 首先定义参数坐标系(即面积坐标系),

$$(\zeta_1, \zeta_2): 0 \leq \zeta_1 \leq 1; 0 \leq \zeta_2 \leq \zeta_1 \quad (10)$$

利用式(10), 笛卡儿坐标系中的任意三角形单元就被映射成参数坐标系中的单位直角三角形单元. 利用三角形单元的三个顶点坐标 (r_1, r_2, r_3) , 可将参数坐标系中空间点 r 映射到三维笛卡儿坐标系中, 即

$$r(\zeta_1, \zeta_2) = r(\zeta) = (1 - \zeta_1) r_1 + (\zeta_1 - \zeta_2) r_2 + \zeta_2 r_3 \quad (11)$$

利用参数坐标变换式(10)和式(11), 奇异性积分式(9)可以写成

$$I_s = C_a \int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\zeta_2=0}^{\zeta_1} \int_{\eta_1=0}^1 \int_{\eta_2=0}^{\eta_1} \frac{F(\zeta, \eta)}{R^v(\zeta, \eta)} e^{-jkR(\zeta, \eta)} d\eta_2 d\eta_1 d\zeta_2 d\zeta_1 \quad (12)$$

其中, 常数 $C_a = 4A_m^q A_n^p$ 为笛卡儿坐标系转化成参数坐标系过程中的雅可比系数, 而 A_m^q 和 A_n^p 分别代表场三角形单元 T_m^q 和源三角形单元 T_n^p 的面积.

下面, 通过引入相对坐标系、重新划分积分区域、并利用广义 Duffy 坐标变换将奇异性积分式(12)转换成为可以精确快速计算的非奇异性积分.

3.1 积分区域的分解

适当交换积分次序并引入相对坐标变换可将 4 维积分式(12)变换成 6 个 4 维积分. 为此, 交换积分式(12)中对 ζ_2 和 η_1 积分的积分次序, 可得

$$I_s = C_a \int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\eta_1=0}^1 \int_{\zeta_2=0}^{\zeta_1} \int_{\eta_2=0}^{\eta_1} \frac{F(\zeta, \eta)}{R^v(\zeta, \eta)} e^{-jkR(\zeta, \eta)} d\eta_2 d\zeta_2 d\eta_1 d\zeta_1 \quad (13)$$

若进一步引入相对坐标变换,

$$u_1 = \eta_1 - \zeta_1; \quad u_2 = \eta_2 - \zeta_2 \quad (14)$$

则积分式(14)变为

$$I_s = C_a \int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\eta_1=-\zeta_1}^{\zeta_1} \int_{\zeta_2=0}^{\zeta_1} \int_{u_2=-\zeta_2}^{u_1+\zeta_1-\zeta_2} \frac{F(\zeta, u)}{R^v(\zeta, u)} e^{-jkR(\zeta, u)} du_2 d\zeta_2 du_1 d\zeta_1 \quad (15)$$

表 1 积分式(15)的积分区域的分解

E_1	$-1 < u_1 < 0$	$u_1 < u_2 < 0$	$-u_1 < \zeta_1 < 1$	$-u_2 < \zeta_2 < \zeta_1 - (u_2 - u_1)$
E_2	$0 < u_1 < 1$	$0 < u_2 < u_1$	$0 < \zeta_1 < 1 - u_1$	$0 < \zeta_2 < \zeta_1$
E_3	$-1 < u_1 < 0$	$0 < u_2 < 1 + u_1$	$u_2 - u_1 < \zeta_1 < 1$	$0 < \zeta_2 < \zeta_1 - (u_2 - u_1)$
E_4	$0 < u_1 < 1$	$u_1 - 1 < u_2 < 0$	$-u_2 < \zeta_1 < 1 - u_1$	$-u_2 < \zeta_2 < \zeta_1$
E_5	$-1 < u_1 < 0$	$-1 < u_2 < u_1$	$-u_2 < \zeta_1 < 1$	$-u_2 < \zeta_2 < \zeta_1$
E_6	$0 < u_1 < 1$	$u_1 < u_2 < 1$	$u_2 - u_1 < \zeta_1$ $< 1 - u_1$	$0 < \zeta_2 < \zeta_1 - (u_2 - u_1)$

若将积分式(15)的积分区域作下列分解,

$$\int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\eta_1=-\zeta_1}^{\zeta_1} du_1 d\zeta_1 = \int_{\zeta_1=-1}^0 \int_{\eta_1=-\zeta_1}^{\zeta_1} du_1 d\zeta_1 + \int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\eta_1=0}^{\zeta_1} du_1 d\zeta_1 \quad (16)$$

$$\int_{\zeta_2=0}^{\zeta_1} \int_{u_2=-\zeta_2}^{u_1+\zeta_1-\zeta_2} du_2 d\zeta_2 = \int_{\zeta_2=-\zeta_2}^0 \int_{u_2=-\zeta_2}^{\zeta_2} du_2 d\zeta_2 + \int_{\zeta_2=0}^{\zeta_1} \int_{u_2=-\zeta_2}^{\zeta_1+\zeta_1-\zeta_2} du_2 d\zeta_2 + \int_{\zeta_2=0}^{\zeta_1} \int_{u_2=0}^{\zeta_1+\zeta_1-\zeta_2} du_2 d\zeta_2 \quad (17)$$

这样, 利用式(16)、(17), 积分式(15)就被分成 6 个 4 维积分,

并可统一地写成

$$E_n = C_a \int_1 \int_2 \int_1 \int_2 \frac{F(\zeta, \bar{u})}{R^v(\zeta, \bar{u})} e^{-jkR(\zeta, \bar{u})} d\zeta_2 d\zeta_1 du_2 du_1, \quad n=1, 2, \dots, 6 \quad (18)$$

据式(16)和(17),表 1 给出了积分式(18)中的 6 个 4 维积分的积分上下限。

3.2 场源三角形单元共面时奇异性积分的处理

当场源三角形单元共面(即三角形单元的三个结点相同)时,利用参数坐标变换式(11)和相对坐标变换式(14),可得到场点 r 和源点 r 之间的距离为

$$R = |r - r| = \sqrt{(r_2 - r_1)u_1 - (r_3 - r_2)u_2}^2 = \sqrt{\alpha_1 u_1^2 + 2\alpha_2 u_1 u_2 + \alpha_3 u_2^2} \quad (19)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = (r_2 - r_1) \cdot (r_2 - r_1) \\ \alpha_2 = (r_2 - r_1) \cdot (r_3 - r_2) \\ \alpha_3 = (r_3 - r_2) \cdot (r_3 - r_2) \end{cases} \quad (20)$$

由式(19)可知,距离 R 仅仅是相对坐标 $\bar{u} = (u_1, u_2)$ 的函数、与参数坐标 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ 无关。由此,积分式(18)可以写成

$$E_n = C_a \int_1 \int_2 \int_1 \int_2 \frac{F(\zeta, \bar{u})}{R(\bar{u})} e^{-jkR(\bar{u})} d\zeta_2 d\zeta_1 du_2 du_1 \quad (21)$$

值得注意的是,由于磁场积分方程的奇异性积分此时具有解析结果,在式(21)中仅仅给出了伽略金法求解电场积分方程所对应的奇异性积分($v=1$)。由于对 $\bar{u}$ 的积分区域的对称性(如表 1 所示),很容易将 6 个积分 E_n 合并成为 3 个积分,

$$Q_1 = E_1 + E_2 = C_a \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{F(\zeta, \bar{u}) + F(\zeta + \bar{u}, -\bar{u})}{R(\bar{u})} e^{-jkR(\bar{u})} d\zeta_2 d\zeta_1 du_2 du_1 \quad (22)$$

$$Q_2 = E_3 + E_4 = C_a \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{F(\zeta, \bar{u}) + F(\zeta + \bar{u}, -\bar{u})}{R(\bar{u})} e^{-jkR(\bar{u})} d\zeta_2 d\zeta_1 du_2 du_1 \quad (23)$$

$$Q_3 = E_5 + E_6 = C_a \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{F(\zeta, \bar{u}) + F(\zeta + \bar{u}, -\bar{u})}{R(\bar{u})} e^{-jkR(\bar{u})} d\zeta_2 d\zeta_1 du_2 du_1 \quad (24)$$

由此,积分式(12)可以写成 3 个 4 维积分之和,

$$I_s = \sum_{l=1}^3 Q_l \quad (25)$$

然而,积分式(25)仍然为奇异性积分,下面利用广义 Duffy 坐标变换可以将该奇异性积分转换成非奇异性积分。

3.3 广义 Duffy 坐标变换

由式(19)可以知道,积分式(25)的奇异点均在坐标原点 $\bar{u} = 0$ 。广义 Duffy 坐标变换可以用来消除多维积分在原点处的奇异性。若对积分式(22)~(24)作如表 2 的广义 Duffy 坐标变换,则每一个积分 Q_l 中的距离 $R(\bar{u}) = R(\omega, x) = \omega R_{D,l}(x)$, $du_2 du_1 = \omega dx dx$;并且可由表 2 很容易证明:对于每一个 Q_l ,不论取积分区域内的何值时 $R_{D,l}(x)$ 始终不等于零,因此积分式(22)~(24)就转换成了非奇异性积分。另外,积分式(25)中的各个 Q_l ($l=1, 2, 3$) 在相对坐标系 (u_1, u_2) 中的积

分上下限不同,但通过表 2 所给出的广义 Duffy 坐标变换后,在 Duffy 变换坐标 (ω, x) 系中却具有相同的积分区域:单位正方形,这给数值积分带来了极大方便。

由式(7)、(8)和(11)可以知道, $F(\zeta, \bar{u})$ 和 $F(\zeta + \bar{u}, -\bar{u})$ 总是关于 ζ 的简单多项式,而距离 R 又与 ζ 无关,因此对坐标 ζ 的积分可解析地求出。若将积分 Q_l 中对 ζ 的积分写成

$$P_l(\bar{u}) = \iint F(\zeta, \bar{u}) + F(\zeta + \bar{u}, -\bar{u}) d\zeta \quad (26)$$

则奇异性积分式(12)最终可以表示成非奇异性积分,

$$I_s = C_a \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \sum_{l=1}^3 \frac{P_l(\omega, x)}{R_{D,l}(x)} e^{-jkR_{D,l}(x)} dx d\omega \quad (27)$$

通过上述的一系列变换过程,将原来具有奇异性的 4 维积分式(21)就变成了 2 维非奇异性积分。由于积分式(27)的被积函数中总是可以写成包含因子 $\omega^l e^{-jkR_{D,l}(x)}$ ($l=0, 1, \dots$) 的形式,关于 ω 的积分总是可以解析地求出,因此积分式(27)仅

需作 1 维数值积分运

	Q_1	Q_2	Q_3
u_1	ω	ωx	ωx
u_2	ωx	$\omega(x-1)$	ω

3.4 场源三角形单元共边(即具有两个公共结点)时奇异性积分的处理

假设场源三角形单元的两个公共结点坐标为 r_1 和 r_2 , 则由式(11)有

$$r - r' = -(r_2 - r_1)u_1 - (r_3 - r_2)u_2 - (r_3 - r_1)\zeta_2 \quad (28)$$

由上式知,仅当 $u_1 = u_2 = \zeta_2 = 0$ 时场点和源点的距离 $R = |r - r'| = 0$;同时, $r - r'$ 和 R 均与 ζ_1 无关。

下面以 E_1 为例来说明如何将奇异性积分式(18)转换成非奇异性积分。利用积分(28)和表 1, E_1 可以写成,

$$E_1 = C_a \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{F(\zeta, \bar{u})}{R^v(\bar{u}, \zeta_2)} e^{-jkR(\bar{u}, \zeta_2)} d\zeta_2 d\zeta_1 du_2 du_1 \quad (29)$$

注意到 $R(\bar{u}, \zeta_2)$ 与 ζ_1 无关,若交换积分式(29)中对 ζ_1 和 ζ_2 的积分次序,并将变换

$$\bar{z} = -\bar{u}, s_2 = \zeta_2 + (z_1 - z_2) \quad (30)$$

代入积分式(29),可得

$$E_1 = C_a \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{e^{-jkR(-\bar{z}, s_2)}}{R^v(-\bar{z}, s_2)} \left(\int_{s_2}^1 F(\zeta_1, -\bar{z}) d\zeta_1 \right) ds_2 dz_2 dz_1 \quad (31)$$

由于 $F(\zeta_1, -\bar{z})$ 是关于 ζ_1 的简单多项式,对 ζ_1 的积分可以解析求出;而其余的 3 维积分的积分区域为结点位于原点的四面体。若按循环方式交换式(31)的积分次序可得

$$E_1 = C_a \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{e^{-jkR(-\bar{z}, s_2)}}{R^v(-\bar{z}, s_2)} \left(\int_{s_2}^1 F(\zeta_1, s_2; -\bar{z}) d\zeta_1 \right) ds_2 dz_2 dz_1 \quad (32)$$

对积分式(32)作广义 Duffy 坐标变换,

$$s_2 = \omega, z_1 = \omega x_1, z_2 = \omega x_1 x_2 \quad (33)$$

则积分式(32)可以写成,

$$E_1 = C_a \int_{\omega=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \frac{\omega^2 x_1 e^{-j k R(\omega, x_1, x_2)}}{R^v(\omega, x_1, x_2)} \left(\int_{\zeta_1=\omega}^1 F(\zeta_1, \omega, x_1, x_2) d\zeta_1 \right) dx_2 dx_1 d\omega \quad (34)$$

积分式(34)中的为广义 Duffy 坐标变换式(33)的雅可比系数. 这样,原积分式(29)就变换成为单位立方体上的体积分. 同时,将变换式(30)和广义 Duffy 坐标变换式(33)代入式(28)后, R^v 可以表示成 $R^v = \omega^v R_{D,1}^v(x_1, x_2)$, 且 x_1, x_2 取积分区域内的任意值时 $R_{D,1}(x_1, x_2)$ 始终不为零. 因此积分式(34)为一非奇异性积分,并可明确地表示成为

$$E_1 = C_a \int_{\omega=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \frac{\omega^{2-v} x_1 e^{-j k R_{D,1}(x_1, x_2)}}{R_{D,1}^v(x_1, x_2)} \left(\int_{\zeta_1=\omega}^1 F(\zeta_1, \omega, x_1, x_2) d\zeta_1 \right) dx_2 dx_1 d\omega \quad (35)$$

其余 5 个积分 $E_n (n=2, \dots, 6)$ 可以采用类似方法的处理,且从坐标 $\bar{u}$ 和 $\bar{\zeta}$ 到广义 Duffy 变换坐标 (ω, x_1, x_2) 的变换关系如表 3 所示. 与前面场源三角形单元共面时相同,积分式(35)中对 ω 的积分也具有解析结果,因此积分式(35)仅需作 2 维数值积分运算,并且各个积分 $E_n (n=1, 2, \dots, 6)$ 均具有相同的数值积分区域:单位立方体.

表 3 具有公共边的两个三角形单元的广义 Duffy 坐标变换

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
u_1	$-\omega x_1$	ωx_1	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1 x_2$	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1 x_2$
u_2	$-\omega x_1 x_2$	$\omega x_1 x_2$	$\omega x_1 (1-x_2)$	$-\omega x_1 (1-x_2)$	$-\omega x_1$	ωx_1
ζ_2	$\omega(1-x_1+x_1 x_2)$	$\omega(1-x_1)$	$\omega(1-x_1)$	$\omega(1-x_1 x_2)$	ω	$\omega(1-x_1)$

3.5 场源三角形单元具有 1 个公共结点时奇异性积分的处理

若两个相邻三角形单元具有一个公共结点 r_1 ,由参数坐标(11)可得

$$\begin{aligned} r-r' &= (\eta_1 - \zeta_1) r_1 + (\zeta_1 - \zeta_2) r_2 + \zeta_2 r_3 \\ &\quad - (\eta_1 - \eta_2) r'_2 - \eta_2 r'_3 \end{aligned} \quad (36)$$

由式(36)可知,仅当满足下列条件时,

$$\eta_1 = \eta_2 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0 \quad (37)$$

场点与源点之间的距离 $R = |r-r'|$ 才为零,则公共结点 r_1 为被积函数的奇异点并位于参数坐标系的坐标原点. 该孤立奇异点也可以通过广义 Duffy 坐标变换来消除,为此首先重新划分积分式(12)的积分区域为,

$$I_s = C_a \int_{\omega=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{\zeta_1=0}^1 \left\{ \frac{F(\bar{\zeta}, \bar{\eta}) e^{-j k R(\bar{\zeta}, \bar{\eta})}}{R^v(\bar{\zeta}, \bar{\eta})} + \frac{F(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) e^{-j k R(\bar{\eta}, \bar{\zeta})}}{R^v(\bar{\eta}, \bar{\zeta})} \right\} d\eta_2 d\zeta_2 d\eta_1 d\zeta_1 \quad (38)$$

实际上,仅需对积分式(38)作如下的广义 Duffy 坐标变换,

$$\zeta_1 = \omega, \zeta_2 = \omega x_1; \eta_1 = \omega x_2, \eta_2 = \omega x_2 z_3 \quad (39)$$

就可以消除积分式(38)中的被积函数在坐标原点处的奇异性,并可得到

$$I_s = C_a \int_{\omega=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{z_3=0}^1 \left\{ \frac{F(\bar{\zeta}, \bar{\eta}) e^{-j k R(\bar{\zeta}, \bar{\eta})}}{R^v(\bar{\zeta}, \bar{\eta})} + \frac{F(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) e^{-j k R(\bar{\eta}, \bar{\zeta})}}{R^v(\bar{\eta}, \bar{\zeta})} \right\} \omega^3 z_2 dz_3 dz_2 dz_1 d\omega \quad (40)$$

其中,系数 $\omega^3 z_2$ 为广义 Duffy 坐标变换式(39)的雅可比系数. 将广义 Duffy 坐标变换式(39)代入式(36)很容易得到

$$R^v(\bar{\zeta}, \bar{\eta}) = \omega^v R_{D,1}^v(z_1, z_2, z_3), R^v(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) = \omega^v R_{D,2}^v(z_1, z_2, z_3) \quad (41)$$

且 z_1, z_2, z_3 取积分区域内的任意值时, $R_{D,1}(z_1, z_2, z_3), R_{D,2}(z_1, z_2, z_3)$ 总不为零,因此利用式(41),可将积分式(40)写成能够直接数值计算的非奇异性积分,

$$I_s = C_a \int_{\omega=0}^1 \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^1 \int_{z_3=0}^1 \left\{ \frac{F(\bar{\zeta}, \bar{\eta}) e^{-j k R_{D,1}}}{R_{D,1}^v(z_1, z_2, z_3)} + \frac{F(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) e^{-j k R_{D,2}}}{R_{D,2}^v(z_1, z_2, z_3)} \right\} \omega^{3-v} z_2 dz_3 dz_2 dz_1 d\omega \quad (42)$$

与前面场源三角形单元共面和共边时类似,积分式(42)中对 ω 的积分仍然具有解析结果,因此积分式(42)仅需作 3 维数值积分运算.

4 数值计算结果及讨论

为了验证本文所提出的方法的高效性和高收敛特性,以计算场源三角形单元共面时电场积分方程的标量位所对应的奇异性积分为例,即计算积分

$$I_s = \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-j k R}}{R} dT dT' \quad (43)$$

假设三角形单元 T_0 的三个顶点坐标为 (r_1, r_2, r_3) . 下面将奇异值提取技术和本文方法的计算结果分别与精确计算结果进行对比. 若采用奇异值提取技术,积分式(43)可以写成

$$I_s = \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-j k R} - 1}{R} dT dT' + \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{R} dT dT' \quad (44)$$

积分式(44)的第一项为非奇异性积分,可以直接采用数值积分法计算,此例中采用高斯积分法;第二项的奇异性积分具有解析结果^[3,4].

采用本文所提出的方法可将积分式(43)写成

$$I_s = 8A^2 \int_0^1 dx \sum_i \frac{1}{R_{D,i}} \left\{ \frac{1}{k R_{D,i}} \right\}^2 \left\{ \left(1 - \frac{\sin(k R_{D,i})}{k R_{D,i}} \right) - j \left[\frac{k R_{D,i}}{2} - \frac{1 - \cos(k R_{D,i})}{k R_{D,i}} \right] \right\} \quad (45)$$

其中

$$\begin{cases} R_{D,1} = \sqrt{\alpha_1 + 2\alpha_2 x + \alpha_3 x^2} \\ R_{D,2} = \sqrt{\alpha_1 (1-x)^2 - 2\alpha_2 x(1-x) + \alpha_3 x^2} \\ R_{D,3} = \sqrt{\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_3} \end{cases} \quad (46)$$

式(46)中的 $\alpha_i (i=1, 2, 3)$ 由式(20)求出. 这样,积分式(45)可以采用一维数值积分法求出(本文采用一维高斯积分法).

在以下的例子中,选取 $k=1$ 并以计算误差为 10^{-16} 的自适应积分法^[9]的计算结果作为精确积分结果. 在第一个例子中,假定场源三角形单元的三个顶点坐标分别为: $r_1 = (0, 0, 0), r_2 = (1, 0, 0)$ 和 $r_3 = (0.866, 0.5, 0)$ 即位于 xy 平面内的边长为 1m 的等边三角形单元. 此时,采用自适应积分法的精确计算结果为

$$I_{1,\text{ref}} = 0.7904333019757165 - j0.182369061211244 \quad (47)$$

图 1(a)和(b)分别描述了奇异值提取法和本文方法的数值积分结果与精确计算结果的相对误差随高斯积分法插值点个数

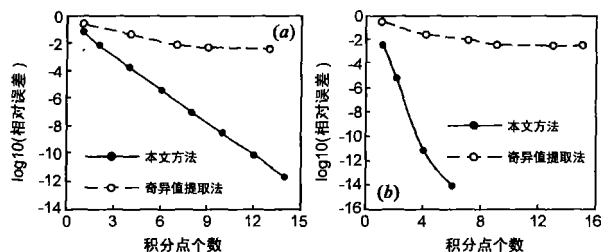


图 1 奇异值提取法和本文方法的数值积分结果与精确计算结果的相对误差随高斯积分法插值点个数的变化关系, 三角形单元的三个顶点坐标为: $r_1=(0,0,0)$ 、 $r_2=(1,0,0)$ 和 $r_3=(0.866, 0.5,0)$ 。(a) 实部的收敛曲线, (b) 虚部的收敛曲线。

的变化关系。对于本文方法,在数值积分中需要计算被积函数的次数就等于高斯积分法的插值点个数;而在奇异值提取法中,需要计算被积函数的次数就等于高斯积分法的插值点个数的平方,对场单元和源单元上采用具有相同插值点数的高斯积分法。由图 1(a)和(b)可以看出,本文方法比传统的奇异值提取法的收敛速度要快得多。在积分(44)中对被积函数实部的积分为奇异性积分,而对虚部的积分为非奇异性积分,由此可以知道对虚部积分的收敛性能好于对实部的积分。在图 1(b)中,本文方法很快收敛到精确结果,而传统的奇异值提取法却只能收敛到一定精度,即使进一步增加高斯积分插值点个数。

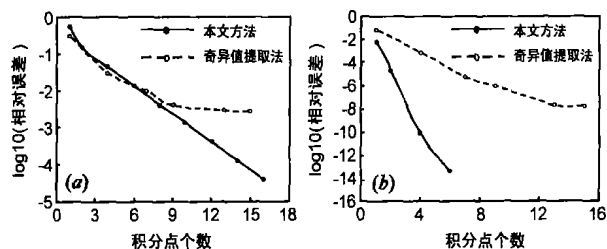


图 2 奇异值提取法和本文方法的数值积分结果与精确计算结果的相对误差随高斯积分法插值点个数的变化关系, 三角形单元的三个顶点坐标为: $r_1=(0,0,0)$ 、 $r_2=(1,0,0)$ 和 $r_3=(0, -0.5,0.866)$ 。(a) 实部的收敛曲线, (b) 虚部的收敛曲线。

在第二个例子中选取三角形单元的三个顶点坐标分别为: $r_1=(0,0,0)$ 、 $r_2=(1,0,0)$ 和 $r_3=(0, -0.5,0.866)$ 。该三角形单元为不规则的窄形单元(最小内角为 15°),采用自适应积分法的精确积分结果为

$$I_{2,\text{ref}} = 0.279518431965788 - j0.0593170673395969 \quad (48)$$

奇异值提取法和本文方法的数值积分结果与精确计算结果的相对误差随高斯积分法插值点个数的变化关系如图 2(a)和(b)。与第一个例子相比,对虚部积分的收敛速度仍然很快,而对实部积分的收敛速度有所降低。但是,当高斯积分插值点个数增加时,本文方法的收敛趋势不变,而奇异值提取法仍然只能收敛到一定精度。

5 结束语

利用 RWG 基函数的伽略金法求解电磁场积分方程需要计算 4 维奇异性积分,本文通过参数坐标变换、相对坐标变换、积分区域分解和广义 Duffy 坐标变换相结合的技术将该奇异性积分转化成非奇异性积分、降低了原 4 维奇异性积分的数值积分维数。通过计算实例表明,该方法利用较少的计算量可以得到更为

精确的积分结果。另外,该方法可以方便用来精确快速计算时域积分方程矩量法中的时域阻抗矩阵元素。

参考文献:

- [1] Harrington R F. Field Computation by Moment Methods [M]. New York: Macmillan, 1968.
- [2] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1982, 30(3): 409 - 418.
- [3] Wilton D R, Rao S M, Glisson A W, et al. Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1984, 32(3): 276 - 281.
- [4] Gaglia R D. On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1993, 41(10): 1448 - 1455.
- [5] Duffy M G. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex [J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19(6): 1260 - 1262.
- [6] Chew W C, Jin J M, Michielssen E, Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics [M]. Boston, MA: Artech House, 2001.
- [7] Pasi Y O, Matti T. Calculation of CFIE impedance matrix elements with RWG and $n \times \text{RWG}$ functions [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 2003, 51(8): 1837 - 1846.
- [8] Caorsi S, Moreno D, Sidoti F. Theoretical and numerical treatment of surface integrals involving the free-space Green's functions [J]. IEEE Trans Antennas and Propagat, 1993, 41(9): 1296 - 1301.
- [9] Bernsten J, Espelid T O. Algorithm 706. DCUTRI: an algorithm for adaptive cubature over a collection of triangles [J]. ACM Trans Math Software, 1992, 18(3): 329 - 342.

作者简介:



赵延文 男, 1965 生于四川武胜, 副教授, 博士, 1998 年至 1999 年曾在香港城市大学电子工程系作访问学者, 已在国内外发表学术论文 40 余篇, 获国家科技进步二等奖和四川省科技进步一等奖各一项, 主要从事计算电磁学、非均匀介质中的场与波及其在石油电测井中的应用、电磁散射与逆散射及其在生物医学中的应用、时域超宽带电磁场理论及其应用等的研究。E-mail: ywzhao@uestc.edu.cn.

聂在平 男, 1946 生于陕西西安, 教授, 博士生导师, 电子科技大学副校长, 1987 ~ 1989 年曾在美国伊利诺依大学电磁实验室从事研究工作, 近年来主持并完成 20 余项科研项目, 先后获国家科技进步二、三等奖, 省、部级一、二、三等奖科技进步奖共五项, 在国内外发表学术论文 200 余篇, 主要研究兴趣: 计算电磁学、电磁散射与逆散射、非均匀介质中的场与波、移动通信中的智能天线技术等。

徐建华 男, 1962 生于重庆梁平, 教授, 博士生导师, 1989 年电子科技大学电磁场与微波技术专业毕业并获博士学位, 先后在国内外发表学术论文 20 余篇, 主要研究兴趣: 微波技术、电磁场理论、计算电磁学等。

武胜波 男, 1980 生于河南南阳, 硕士研究生, 主要研究兴趣: 时域计算电磁学。